一般位相と解析学　講義報告　第 2 回 *

数学工房 †

2008 年 6 月 1 日 14:00-16:30

概要

本日は位相空間を定義するのに開集合系，閉集合系，近傍系のどれを使っても同値になることを示した．また点の位相的な分類を示した．まず開集合系が与えられた位相空間で，これを使って閉集合系を定義した．逆に閉集合系が先に与えられた場合に，これを使って開集合系を定義できることを示した．次に，開集合系が与えられた位相空間で，近傍系を定義した．また逆に近傍系を先に与えて，これを使って開集合系を定義できることを示した．さらに，最初に与えた近傍系と，「近傍系によって定義された開集合系で定義された近傍系」が同値であることを示した．最後に集合 X の部分集合 M と X の要素 x の位相的な分類を示して，いくつかの性質を示した．

1　閉集合系

定義 1.1 (閉集合系). 開集合系 $\mathfrak{O}$ で定義された位相空間 $(X,\ \mathfrak{O})$ が与えられているとする．$A \in 2^X$ が $\mathfrak{O}$-閉集合であるとは $A^c \in \mathfrak{O}$ となることである．

$$\mathfrak{A} := \left\{ A \in 2^X \ ;\ A^c \in \mathfrak{O} \right\}$$

で定義される $\mathfrak{O}$-閉集全体の集合 $\mathfrak{A}$ を X 上の $\mathfrak{O}$ 閉集合系という．

命題 1.1 (閉集合系の性質).

A1　$\emptyset \in \mathfrak{A},\ X \in \mathfrak{A}$

A2　$A_i \in \mathfrak{A},\ (i = 1,\ 2)$ ならば $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$ である．

A3　$A_\lambda \in \mathfrak{A},\ \lambda \in \Lambda$ ならば $\bigcap A_\lambda \in \mathfrak{A}$ である．

演習 1.1. 命題 *1.1* を示せ．

閉集合系と開集合系は同値である．先に閉集合系を与えておけば，これを用いて開集合系が定義される．すなわち，次の命題が成り立つ．

命題 1.2. *A1* から *A3* を満たす $\mathfrak{A} \subset 2^X$ が与えられたとき

$$\mathfrak{O} := \left\{ O \in 2^X \ ;\ O^c \in \mathfrak{A} \right\}$$

は X の *1* つの開集合系を与える．

---

* Reported by H.T.

† `http://www.sugakukobo.com`

2　近傍系

開集合系が与えられると，近傍系が定義できる．具体的な応用に際しては近傍系は扱いやすいことが多い．

定義 2.1 (近傍系). 位相空間 $(X,\ \mathfrak{O})$ が与えられている．任意の $x \in X$ に対して $V \in 2^X$ が x の $\mathfrak{O}$ とは $U \in \mathfrak{O}$ が存在して，

$$x \in U \subset V$$

となることである．x の近傍全体を $\mathfrak{V}_{\mathfrak{O}}(x)$ と記す．また

$$\mathfrak{V}_{\mathfrak{O}} := \{\mathfrak{V}_{\mathfrak{O}}(x)\ ;\ x \in X\}$$

を X 上の $\mathfrak{O}$ 近傍系という．

なお開集合系 $\mathfrak{O}$ が先に与えられて定義された近傍系であることを明示するときには $\mathfrak{V}_{\mathfrak{O}}$ と記述する．混乱のないときには $\mathfrak{V}$ と略記する．本節の近傍系は $\mathfrak{V}_{\mathfrak{O}}$ であることに注意せよ．

近傍系は次の性質を持つ．

命題 2.1.

V0　$\mathfrak{V}(x) \neq \emptyset,\ (\forall x \in X)$

V1　$V \in \mathfrak{V}(x)$ ならば $x \in V$ である．

V2　$V_1 \in \mathfrak{V}(x)$ かつ $V_1 \subset V_2$ ならば $V_2 \in \mathfrak{V}(x)$ である．

V3　$V_1,\ V_2 \in \mathfrak{V}(x)$ ならば $V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{V}(x)$ である．

V4　任意の $V \in \mathfrak{V}(x)$ に対して，任意の $y \in W \Longrightarrow V \in \mathfrak{V}(y)$ となる $W \in \mathfrak{V}(x)$ が存在する．論理記号で書くと以下の通りである．

$$\forall V \in \mathfrak{V}(x),\ \exists W \in \mathfrak{V}(x),\quad \text{s.t. } \forall y \in W \Longrightarrow V \in \mathfrak{V}(y)$$

本節では開集合系で位相空間が与えられていることに注意せよ．後に，この性質を近傍系の公理ととして採用する．以上の性質を証明するのに次の補題を使うと便利である．

補題 2.2 (開集合の近傍による特徴づけ). $U \in \mathfrak{O}$ すなわち U が開集合である必要十分条件は任意の $x \in U$ に対して U が x の近傍になっていることである．すなわち

$$U \in \mathfrak{O} \Longleftrightarrow \forall x \in U \Longrightarrow U \in \mathfrak{V}(x)$$

が成り立つことである．

演習 2.1. 補題 *2.2* を使って命題 *2.1* を示せ．

3　近傍の公理系

前節では先に開集合系を与えて近傍系を定義した．逆に，先に近傍系を定義して，これから開集合系を定義することができる．さらに，この開集合系を使って近傍系を定義することができる．最初に与えた近傍系と，近傍系を使って定義された開集合系を使って定義された近傍系は同値であることを示すことができる．このこ

とから，位相空間を定義するのに，開集合系を先に定義しても，近傍系を先に定義しても同値であることがわかる．また 1 章で説明したように，開集合系と閉集合系は同値である．結局，位相空間を定義するのに，開集合系，閉集合系，近傍系のどれを出発点に用いても同値となるのである．扱う対象に応じて，開集合系，閉集合系，近傍系のいずれかを与えて位相空間を定義すればよい．

それでは本節の出発点となる近傍系の定義から開始する．この定義は先に，開集合系を与えて定義した近傍が持つ性質そのものである．

公理 3.1 (近傍系の公理). 集合 $X \neq \emptyset$ 上の各点 $x \in X$ に対して次の V0-V4 の性質を持つ部分集合族 $\mathfrak{V}(x)$ が対応するとき，

$$\mathfrak{V}(X) := \{\mathfrak{V}(x)\ ;\ x \in X\}$$

を X の近傍系という．

V0　$\mathfrak{V}(x) \neq \emptyset$

V1　$V \in \mathfrak{V}(x)$ ならば $x \in V$ である．

V2　$V_1 \in \mathfrak{V}(x)$ かつ $V_1 \subset V_2$ ならば $V_2 \in \mathfrak{V}(x)$ である．

V3　$V_1,\ V_2 \in \mathfrak{V}(x)$ ならば $V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{V}(x)$ である．

V4　任意の $V \in \mathfrak{V}(x)$ に対して，任意の $y \in W \Longrightarrow V \in \mathfrak{V}(y)$ となる $W \in \mathfrak{V}(x)$ が存在する．論理記号で書くと以下の通りである．

$$\forall V \in \mathfrak{V}(x),\ \exists W \in \mathfrak{V}(x),\ \ \text{s.t.}\ \forall y \in W \Longrightarrow V \in \mathfrak{V}(y)$$

定理 3.1. 集合 $X(\neq \emptyset)$ 上に近傍系 $\mathfrak{V}(X)$ が与えられたとき

$$\mathfrak{O}_{\mathfrak{V}} := \left\{U \in 2^X\ ;\ \forall y \in U \Longrightarrow U \in \mathfrak{V}(y)\right\}$$

で定義される集合族 $\mathfrak{O}_{\mathfrak{V}}$ は X 上の開集合系である．

この定理で使った開集合系の定義は，先の開集合の近傍による特徴づけの補題 2.2 の性質である．自分の要素に対して近傍になっているような集合を開集合系としているのである．

定理 3.2. $\mathfrak{O}_{\mathfrak{V}}$ から決定する近傍系 $\mathfrak{V}_{\mathfrak{O}_{\mathfrak{V}}}(X)$ は $\mathfrak{V}(X)$ と一致する．

ここまでの証明では近傍の公理 (V4) を使っていない．この公理は近傍の同値性の定理 3.2 を証明するのに使う．

演習 3.1. 定理 *3.1* と定理 *3.2* を示せ．

4　点の位相的分類

定義 4.1. 位相空間 $(X,\ \mathfrak{O})$ が与えられているとき，X の任意の部分集合 $M \in 2^X$ と点の関係を以下の定義に従って分類する．

M **の開核**　M の開核 M^i とは M に含まれる最大の開集合のことである．

M **の閉包**　M の閉包 M^a とは M を含む最小の閉集合のことである．

M **の境界**　M の境界 M^f とは次の定義に従う集合である．

$$M^f := M^a \setminus M^i$$

M **の外核**　M の外核 M^e とは次の定義に従う集合である．

$$M^e := (M^c)^i$$

次の命題が成立する．

命題 4.1. M には開核が存在して，

$$M^i = \bigcup \{U \ ; \ U \in \mathfrak{O},\ U \subset M\}$$

である．ただし $\emptyset$ になる場合も除外していない．

M には閉包が存在して

$$M^a = \bigcap \{A \ ; \ A \in \mathfrak{A},\ M \subset A\}$$

である．

命題 4.2.

1° $M^i \subset M \subset M^a$

2° $M \in \mathfrak{O} \Longleftrightarrow M = M^i$

3° $M \subset N \Longrightarrow M^i \subset N^i$ である．

4° $M \subset N \Longrightarrow M^a \subset N^a$ である．

演習 4.1. 命題 *4.1* と *4.2* を示せ．